5 - الدوال اللوغاريتمية

معـــارف

I - الدالة «لوغاريتم نيبري»

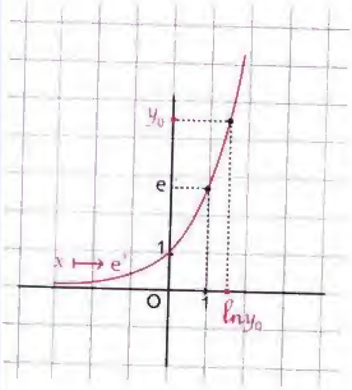
1 . مبرهنة و تعريف

• من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما ، المعادلة $e^t = x$ تقبل حلا وحيدا t يرمز له $\ell n x$.
العدد الحقيقي $\ell n x$ يقرأ اللوغاريتم النيبري لـ x.

• الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي موجب تماما x العدد $\ell n x$ تسمى الدالة «لوغاريتم نيبري» ويرمز لها بـ ℓn.

ملاحظات :

1 . الدالة $\ell n : x \longmapsto \ell n x$ معرفة على المجال $]0 ; +\infty[$ و تأخذ قيمها في $\mathbb{R}$.



2 . المعادلة $e^t = x$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$ ؛ من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x (لأن الدالة الأسية $x \longmapsto e^x$ معرفة، مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$).

3 . حل المعادلة $e^x = y_0$ ، حيث y_0 عدد حقيقي موجب تماما هو العدد الحقيقي x فاصلة النقطة من المنحني الممثل للدالة $x \longmapsto e^x$ ، ذات الترتيب y_0.
نكتب : $x = \ell n y_0$.

4 . من أجل كل عدد حقيقي y موجب تماما ، من أجل كل عدد حقيقي x
$e^x = y$ يكافئ $x = \ell n y$.

5 . $e^0 = 1$ يعني $\ell n 1 = 0$ ؛ $e^1 = e$ يعني $\ell n e = 1$

6 . التمثيل الموالي يسمح بالقول أن الدالة $\ell n : x \longmapsto \ell n x$ هي الدالة العكسية للدالة $\exp : x \longmapsto e^x$.

$$\begin{tikzcd}]-\infty ; +\infty[\arrow[r, "\exp"] &]0 ; +\infty[\arrow[l, bend left, "\ell n"] \end{tikzcd}$$

7 . من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما ، $e^{\ell n x} = x$.
من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $\ell n e^x = x$.

2 . مبرهنة

الدالة «لوغاريتم النيبري» ℓn قابلة للاشتقاق على المجال $]0 ; +\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما ، $\ell n' x = \frac{1}{x}$.

3. خواص

من أجل كل عددين حقيقيين x و y موجبين تماما و من أجل كل عدد ناطق n،

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y \qquad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x \qquad \ln(x^n) = n\ln x$$

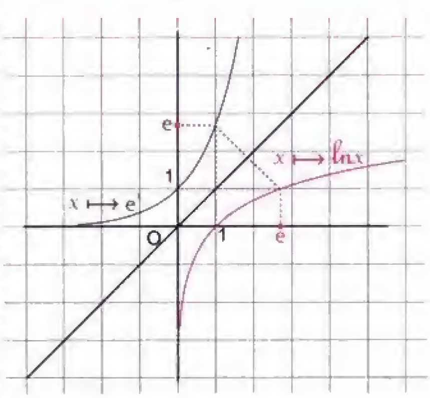
حالة خاصة : من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما ، $\ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln x$.

4. دراسة الدالة «اللوغاريتم النيبري»

- الدالة $\ln$ معرفة على المجال $]0 ; +\infty[$ و تأخذ قيمها في المجال $]-\infty ; +\infty[$.
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ ؛ $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
- الدالة $\ln$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0 ; +\infty[$

و من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x ؛ $\ln' x = \frac{1}{x}$.
- الدالة $\ln$ مستمرة على المجال $]0 ; +\infty[$ (لأنها قابلة للاشتقاق على $]0 ; +\infty[$).
- الدالة $\ln$ متزايدة تماما على المجال $]0 ; +\infty[$.
- مما سبق يكون جدول تغيرات الدالة $\ln$ كما يلي :

x	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	+	
$\ln x$	$-\infty$ ↗	$+\infty$



- المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ (أي محور التراتيب) هو مستقيم مقارب للمنحني الممثل للدالة $\ln$.
- المنحنى الممثل للدالة $\ln$ يقبل فرع قطع مكافئ بجوار $+\infty$.
- في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ المنحنيان الممثلان للدالتين exp و $\ln$ متناظران بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة $y = x$.

5. نتيجتان

من أجل كل عددين حقيقيين a و b موجبين تماما ،

$\ln a = \ln b$ إذا و فقط إذا كان $a = b$.

$\ln a < \ln b$ إذا و فقط إذا كان $a < b$.

تستعمل هاتان النتيجتان لحل معادلات و متراجحات.

6 . اشتقاق الدالة $x \longmapsto \ln|u(x)|$

مبرهنة

u دالة معرفة على مجال I.

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على I و لا تنعدم على I فإن الدالة $x \longmapsto \ln|u(x)|$ قابلة للاشتقاق على I و من أجل كل عدد حقيقي x من I، $(\ln|u(x)|)' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

7 . نهايات شهيرة

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x \ln x = 0$$

II - دوال لوغاريتم و دوال أسية أخرى

1 . الدالة «اللوغاريتم العشري»

تعريف

الدالة «اللوغاريتم العشري» يرمز لها $\log$ هي الدالة المعرفة على المجال $]0 ; +\infty[$ كما يلي :

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

ملاحظات

1 . $\log 1 = 0$; $\log 10 = 1$; $\ln 10 \approx 2{,}30$

2 . الدالة $\log$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0 ; +\infty[$

و دالتها المشتقة معرفة على $]0 ; +\infty[$ كما يلي : $(\log x)' = \dfrac{1}{x \ln 10}$

3 . الدالة $\log$ لها نفس تغيرات الدالة $\ln$ على المجال $]0 ; +\infty[$.

خواص

من أجل كل عددين حقيقيين x و y موجبين تماما و من أجل كل عدد ناطق n،

$$\log(xy) = \log x + \log y \quad ; \quad \log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$$

$$\log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log x \quad ; \quad \log(x^n) = n \log x$$

نتيجة : من أجل كل عددين حقيقيين a و b موجبين تماما ،

$\log a = \log b$ يكافئ $a = b$.

$\log a < \log b$ يكافئ $a < b$.

2 . الدوال الأسية ذات الأساس a

تعريف

a عدد حقيقي موجب تماما حيث $a \neq 1$.

نسمي الدالة الأسية ذات الأساس a ، يرمز لها exp_a ، الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $exp_a(x) = a^x$.

ملاحظة

من أجل كل عدد حقيقي x و من أجل كل عدد حقيقي a موجب تماما حيث $a \neq 1$ ، $a^x = e^{x\ln a}$.

خواص

من أجل كل عددين حقيقيين a و b موجبين تماما حيث $a \neq 1$ و $b \neq 1$

و من أجل كل عددين حقيقيين x و y ،

$a^{x+y} = a^x a^y$	$a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$	$(ab)^x = a^x b^x$
$a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$	$(a^x)^y = a^{xy}$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^y}$

3 . تغيرات الدالة exp_a

1 • إذا كان $0 < a < 1$ فإن $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ ؛ $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$

إذا كان $a > 1$ فإن $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$ ؛ $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$

2 • الدالة exp_a قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $exp'_a(x) = (\ln a)\, a^x$

3 • إذا كان $0 < a < 1$ فإن الدالة exp_a متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

إذا كان $a > 1$ فإن الدالة exp_a متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

4 • جدول التغيرات

$0 < a < 1$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$(a^x)'$	-
a^x	$+\infty$ ↘ 0

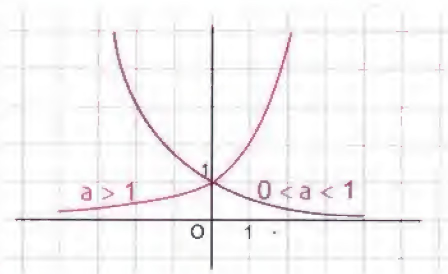
$a > 1$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$(a^x)'$	+
a^x	0 ↗ $+\infty$

5 • عندما a يمسح $\mathbb{R}_+^*$ و $a \neq 1$ كل منحنيات الدالة exp_a تشمل النقطة ذات الإحداثيين $(0\,;\,1)$.

• محور الفواصل هو مستقيم مقارب أفقي لهذه المنحنيات.

• كل هذه المنحنيات تقبل فرع قطع مكافئ منحاه هو منحى محور التراتيب.



III - الدالة «جذر نوني»

تعريف

n عدد طبيعي أكبر تماما من 1.

نسمي الدالة «جذر نوني» و نرمز لها بـ $\sqrt[n]{\ }$ ، الدالة المعرفة على المجال $[0 ; +\infty[$ و التي ترفق بكل عدد حقيقي x موجب ، العدد الموجب $\sqrt[n]{x}$ حيث $x = (\sqrt[n]{x})^n$.

نتيجة

1 • من أجل كل عدد حقيقي موجب x ؛ $A = \sqrt[n]{x}$ يكافئ $A^n = x$.

2 • من أجل كل عدد حقيقي موجب x ؛ $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

3 • من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما ؛ $\sqrt[n]{x} = e^{\frac{1}{n}\ln x}$.

4 • $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$ ؛ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \sqrt[n]{x} = 0$.

IV - التزايدات المقارنة

نعلم أن $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ حيث n عدد طبيعي غير منعدم .

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ ؛ $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

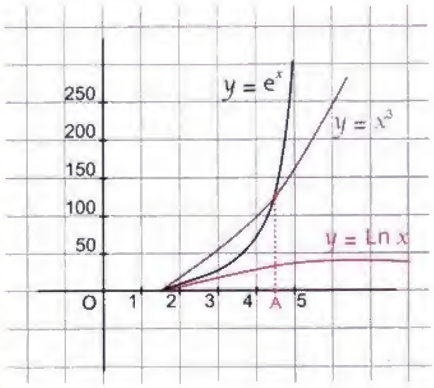
مبرهنة

n عدد طبيعي غير منعدم. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$ ؛ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$

نتيجة

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x^n \ln x = 0$ ؛ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$

التفسير البياني للتزايدات المقارنة



نرسم المنحنيات المثلة للدوال

$x \longmapsto x^3$ ؛ $x \longmapsto \ln x$ ؛ $x \longmapsto e^x$

في نفس المعلم المتعامد $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ ، (الشكل).

نلاحظ أنه يوجد عدد حقيقي موجب تماما A حيث من أجل $x > A$، يكون $e^x > x^3 > \ln x$ (بالحاسبة $A \approx 4,6$).

نقول إن الدالة $x \longmapsto e^x$ تتزايد بسرعة أكبر بالنسبة إلى الدالة $x \longmapsto x^3$ و الدالة $x \longmapsto x^3$ تتزايد بسرعة أكبر بالنسبة إلى الدالة $x \longmapsto \ln x$ بجوار $+\infty$.

بصفة عامة، من أجل كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1، يوجد عدد حقيقي موجب تماما A حيث من أجل $x > A$، يكون $e^x > x^3 > \ln x$. أي الدالة $x \longmapsto e^x$ تتزايد بسرعة أكبر بالنسبة إلى الدالة $x \longmapsto x^n$ و الدالة $x \longmapsto x^n$ تتزايد بسرعة اكبر بالنسبة إلى الدالة $x \longmapsto \ln x$ بجوار $+\infty$.

1 استعمال خواص الدالة $\ln$

تمرين

اكتب على أبسط شكل الأعداد التالية :

$\ln 32$ ؛ $\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 8+4\ln\sqrt{2}$ ؛ $\ln 72-2\ln\frac{27}{256}+\ln\sqrt{108}$

$\ln\frac{1}{8}-\ln 0{,}375+2\ln\sqrt{0{,}5625}$

حل

1 • لدينا $\ln 32=\ln 2^5=5\ln 2$ إذن $\ln 32=5\ln 2$

2 • لدينا $\ln\frac{1}{2}=-\ln 2$ ؛ $\ln 8=\ln 2^3=3\ln 2$ ؛ $\ln\sqrt{2}=\ln 2^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln 2$

إذن
$$\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 8+4\ln\sqrt{2}=-\ln 2+\frac{1}{2}\times 3\ln 2+4\times\frac{1}{2}\ln 2$$
$$=-\ln 2+\frac{3}{2}\ln 2+2\ln 2$$
$$=\left(-1+\frac{3}{2}+2\right)\ln 2=\frac{5}{2}\ln 2$$

ينتج أن $\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 8+4\ln\sqrt{2}=\frac{5}{2}\ln 2$

3 • لدينا
$$\ln 72=\ln(9\times 8)=\ln 9+\ln 8$$
$$=2\ln 3+3\ln 2$$

$$\ln\frac{27}{256}=\ln 27-\ln 256=\ln 3^3-\ln 2^8$$
$$=3\ln 3-8\ln 2$$

$$\ln\sqrt{108}=\frac{1}{2}\ln 108=\frac{1}{2}\ln 4\times 27$$
$$=\frac{1}{2}\ln 4+\frac{1}{2}\ln 27=\ln 2+\frac{3}{2}\ln 3$$

إذن
$$\ln 72-2\ln\frac{27}{256}+\ln\sqrt{108}=2\ln 3+3\ln 2-2(3\ln 3-8\ln 2)+\ln 2+\frac{3}{2}\ln 3$$
$$=2\ln 3+3\ln 2-6\ln 3+16\ln 2+\ln 2+\frac{3}{2}\ln 3$$
$$=\left(2-6+\frac{3}{2}\right)\ln 3+(3+16+1)\ln 2=-\frac{5}{2}\ln 3+20\ln 2$$

إذن $\ln 72-2\ln\frac{27}{256}+\ln\sqrt{108}=-\frac{5}{2}\ln 3+20\ln 2$

4 • لدينا $\ln\frac{1}{8} = -\ln 8 = -3\ln 2$

$$\ln 0{,}375 = \ln\frac{375}{1000} = \ln\frac{3}{8} = \ln 3 - \ln 8 = \ln 3 - 3\ln 2$$

$$2\ln\sqrt{0{,}5625} = \ln 0{,}5625 = \ln\frac{5625}{10000} = \ln\frac{5}{16} = \ln 9 - \ln 16 = 2\ln 3 - 4\ln 2$$

إذن $\ln\frac{1}{8} - \ln 0{,}375 + 2\ln\sqrt{0{,}5625} = -3\ln 2 - \ln 3 + 3\ln 2 + 2\ln 3 - 4\ln 2$

$$= -4\ln 2 + \ln 3$$

و بالتالي $\ln\frac{1}{8} - \ln 0{,}375 + 2\ln\sqrt{0{,}5625} = -4\ln 2 + \ln 3$

2 حل معادلات و متراجحات

تمرين 1

حل في $\mathbb{R}$ كل معادلة من المعادلات التالية

$\ln x = 2$ ؛ $\ln(x-1) = 2\ln 3 - 3\ln 2$ ؛ $\ln x + \ln(3x+2) = \ln(2x+3)$

$\ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(x+7)$

حل

1 • حل المعادلة $\ln x = 2$

$\ln x$ معرف إذا كان $x > 0$.

إذن $\ln x = 2$ يعني $x > 0$ و $\ln x = \ln e^2$ و بالتالي $x = e^2$

ينتج أن المعادلة $\ln x = 2$ تقبل حلا واحدا في $\mathbb{R}$ هو e^2.

طريقة أخرى : نعلم أن من أجل $x > 0$ و y عدد حقيقي، $y = \ln x$ يكافئ $x = e^y$

لدينا $\ln x = 2$ إذن $x = e^2$.

2 • حل المعادلة $\ln(x-1) = 2\ln 3 - 3\ln 2$

$\ln(x-1)$ معرف إذا كان $x - 1 > 0$ أي $x > 1$.

إذن $\ln(x-1) = 2\ln 3 - 3\ln 2$ يعني $x > 1$ و $\ln(x-1) = \ln 3^2 - \ln 2^3$

أي $x > 1$ و $\ln(x-1) = \ln\frac{9}{8}$

و بالتالي $x - 1 = \frac{9}{8}$ أي $x = \frac{17}{8}$

ينتج أن المعادلة $\ln(x-1) = 2\ln 3 - 3\ln 2$ تقبل حلا واحدا و هو $\frac{17}{8}$.

3 • حل المعادلة $\ln x + \ln(3x+2) = \ln(2x+3)$

لحل هذه المعادلة نضع الشرط التالي $x > 0$ و $3x + 2 > 0$ و $2x + 3 > 0$ أي $x > 0$.

لدينا $\ln x + \ln(3x+2) = \ln(2x+3)$ يعني $x > 0$ و $\ln x(3x+2) = \ln(2x+3)$

إذن $x > 0$ و $x(3x+2) = 2x+3$

أي $x > 0$ و $3x^2 + 2x = 2x + 3$

أي $x > 0$ و $3x^2 - 3 = 0$

إذن $x > 0$ و $(x = 1$ أو $x = -1)$. ينتج أن $x = 1$.

و بالتالي المعادلة $\ln x + \ln(3x+2) = \ln(2x+3)$ تقبل حلا واحدا هو 1.

4 • حل المعادلة $\ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(x+7)$

لحل هذه المعادلة نضع الشرط التالي $x^2 - 2x - 3 > 0$ و $x + 7 > 0$.

لدينا $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$

إذن $x^2 - 2x - 3 > 0$ إذا و فقط إذا كان $x \in]-\infty ; -1[\cup]3 ; +\infty[$.

و $x + 7 > 0$ إذا و فقط إذا كان $x > -7$.

ينتج أن $x \in]-7 ; -1[\cup]3 ; +\infty[$.

حل المعادلة $\ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(x+7)$ في المجموعة $]-7 ; -1[\cup]3 ; +\infty[$.

لدينا $\ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(x+7)$ إذا و فقط إذا كان $x \in]-7 ; -1[\cup]3 ; +\infty[$

و $x^2 - 2x - 3 = x + 7$ أي $x \in]-7 ; -1[\cup]3 ; +\infty[$ و $x^2 - 3x - 10 = 0$.

حل المعادلة $x^2 - 3x - 10 = 0$ في المجموعة $]-7 ; -1[\cup]3 ; +\infty[$.

$\Delta = 49$ ؛ $\Delta > 0$ إذن المعادلة تقبل حلين مختلفين هما $x_1 = 5$ و $x_2 = -2$.

لدينا 5 و -2 ينتميان إلى المجموعة $]-7 ; -1[\cup]3 ; +\infty[$.

و بالتالي المعادلة $\ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(x+7)$ تقبل حلين مختلفين هما 5 و -2.

تمرين 2

حل كل متراجحة من المتراجحات التالية

$\ln(x-1) \geq 0$ ؛ $\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) > 0$ ؛ $\ln(x+1) + \ln(3-x) < 0$

. $\ln(x^2 - 1) \geq \ln(4x - 1)$

حل

1 • حل المتراجحة $\ln(x-1) \geq 0$.

لحل المتراجحة $\ln(x-1) \geq 0$ نضع الشرط التالي $x - 1 > 0$ أي $x > 1$.

حل المتراجحة $\ln(x-1) \geq 0$ في المجال $]1 ; +\infty[$.

لدينا $\ln(x-1) \geq 0$ يعني $x > 1$ و $\ln(x-1) \geq \ln 1$

أي $x > 1$ و $x - 1 \geq 1$ أي $x > 1$ و $x \geq 2$ إذن $x \geq 2$.

و بالتالي مجموعة حلول المتراجحة $\ln(x-1) \geq 0$ هي $[2 ; +\infty[$.

2 • حل المتراجحة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > 0$.

لحل المتراجحة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > 0$ نضع الشرط التالي $x \neq -1$ و $\frac{x-1}{x+1} > 0$.

أي $x \in]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$.

حل في المجموعة $]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$ المتراجحة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > 0$.

لدينا $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > 0$ يعني $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > \ln 1$ أي $\frac{x-1}{x+1} > 1$.

أي $\frac{x-1}{x+1} - 1 > 0$ أي $\frac{-2}{x+1} > 0$ أي $\frac{2}{x+1} < 0$.

إذن $x + 1 < 0$ و بالتالي $x < -1$.

ينتج أن مجموعة حلول المتراجحة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > 0$ هي $]-\infty ; -1[$.

3 • حل المتراجحة $\ln(x+1) + \ln(3-x) < 0$.

لحل المتراجحة $\ln(x+1) + \ln(3-x) < 0$ نضع الشرط التالي $x + 1 > 0$ و $3 - x > 0$.

أي $x > -1$ و $x < 3$ أي $x \in]-1 ; 3[$.

حل المتراجحة $\ln(x+1) + \ln(3-x) < 0$ في المجال $]-1 ; 3[$.

لدينا $\ln(x+1) + \ln(3-x) < 0$ يعني $\ln(x+1)(3-x) < \ln 1$

إذن $(x+1)(3-x) < 1$ و بالتالي $x^2 - 2x - 2 > 0$

أي $(x - 1 + \sqrt{3})(x - 1 - \sqrt{3}) > 0$

إذن $x \in]-\infty ; 1 - \sqrt{3}[\cup]1 + \sqrt{3} ; +\infty[$ و $x \in]-1 ; 3[$ إذن $x \in]-1 ; 1 - \sqrt{3}[\cup]1 + \sqrt{3} ; 3[$

ينتج أن مجموعة حلول المتراجحة $\ln(x+1) + \ln(3-x) < 0$ هي $]-1 ; 1 - \sqrt{3}[\cup]1 + \sqrt{3} ; 3[$.

4 • حل المتراجحة $\ln(x^2-1) \geq \ln(4x-1)$.

لحل المتراجحة $\ln(x^2-1) \geq \ln(4x-1)$ نضع الشرط التالي $x^2-1>0$ و $4x-1>0$.

أي $x \in]1 ; +\infty[$.

حل المتراجحة $\ln(x^2-1) \geq \ln(4x-1)$ في المجال $]1 ; +\infty[$.

لدينا $\ln(x^2-1) \geq \ln(4x-1)$ إذا و فقط إذا كان $x^2-1 \geq 4x-1$ أي $x^2-4x \geq 0$

إذن $x(x-4)>0$.

و بالتالي $x \geq 4$ أي $x \in [4 ; +\infty[$.

ينتج أن مجموعة حلول المتراجحة $\ln(x^2-1) \geq \ln(4x-1)$ هي $[4 ; +\infty[$.

3 حساب نهايات

تمرين

احسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - \ln x)$ ؛ $\lim\limits_{x \to 1} \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ ؛ $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + (\ln x)^2)$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} (x^2 + (\ln x)^2)$ ؛ $\lim\limits_{x \to -\infty} x \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ ؛ $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

حل

1 • حساب النهاية $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - \ln x)$

الدالة $x \longmapsto 2x - \ln x$ معرفة على المجال $]0 ; +\infty[$.

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - \ln x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(2 - \dfrac{\ln x}{x}\right)$

بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 - \dfrac{\ln x}{x}\right) = 2$

نعلم أن $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ إذن $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(2 - \dfrac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

ينتج أن $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - \ln x) = +\infty$.

2 • حساب النهاية $\lim\limits_{x \to 1} \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

الدالة $x \longmapsto \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ معرفة على المجال $]-1 ; 1[$.

لدينا $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} \dfrac{1-x}{1+x} = 0$ و $\dfrac{1-x}{1+x} > 0$ على المجال $]-1 ; 1[$.

إذن $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) = -\infty$

3 • حساب النهاية $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 + (\ln x)^2\right)$.

الدالة $x \longmapsto x^2 + (\ln x)^2$ معرفة على المجال $]0 ; +\infty[$.

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ إذن $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x)^2 = +\infty$

و نعلم أن $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ ينتج أن $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 + (\ln x)^2\right) = +\infty$.

4 • حساب النهاية $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \left(x^2 + (\ln x)^2\right)$.

لدينا $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$ و نعلم أن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \ln x = -\infty$

إذن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} (\ln x)^2 = +\infty$ ينتج أن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \left(x^2 + (\ln x)^2\right) = +\infty$.

5 • حساب النهاية $\lim\limits_{x \to -\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

الدالة $x \longmapsto x \ln \left(\frac{1}{x} + 1\right)$ معرفة على المجال $]-\infty ; -1[\cup]0 ; +\infty[$.

لدينا $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$

إذن توجد حالة عدم التعيين.

نضع $y = \frac{1}{x}$. عندما $x \longrightarrow -\infty$: $y \longrightarrow 0$.

لدينا $x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{\ln (1 + y)}{y}$

ينتج أن $\lim\limits_{x \to -\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{y \to 0} \frac{\ln (1 + y)}{y} = 1$

و بالتالي $\lim\limits_{x \to -\infty} x \ln \left(\frac{1}{x} + 1\right) = 1$.

6 • حساب النهاية $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

بوضع $y = \frac{1}{x}$ لدينا $x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{\ln (1 + y)}{y}$

و عندما $x \longrightarrow +\infty$: $y \longrightarrow 0$.

إذن $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{y \to 0} \frac{\ln (1 + y)}{y} = 1$

و بالتالي $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$.

4 تعيين دوال مشتقة

تمرين 1

f دالة معرفة على المجال $]0 ; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = x^2(-1 + 2\ln x)$ إذا كان $x > 0$ و $f(0) = 0$.

1 • هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد 0 عن اليمين ؟

2 • عين الدالة المشتقة f' للدالة f.

حل

1 • الدالة f معرفة على المجال $[0 ; +\infty[$.

لدينا $$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2(-1 + 2\ln x)}{x}$$

من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما ؛ $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x(-1 + 2\ln x)$

لدينا $$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x(-1 + 2\ln x)$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} (-x + 2x\ln x) = 0$$

و بالتالي $$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

ينتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد 0 عن اليمين و $f'(0) = 0$.

2 • الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $[0 ; +\infty[$ (f قابلة للاشتقاق على المجال $]0 ; +\infty[$ و قابلة للاشتقاق عند العدد 0 عن اليمين).

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x ؛ $f'(x) = 2x(-1 + 2\ln x) + x^2\left(\frac{2}{x}\right)$

$$= -2x + 4x\ln x + 2x$$

$$= 4x\ln x$$

أي من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x ؛ $f'(x) = 4x\ln x$ و $f'(0) = 0$.

إذن الدالة f' معرفة كما يلي : $f'(x) = 4x\ln x$ إذا كان $x > 0$ و $f'(0) = 0$.

تمرين 2

f هي الدالة المعرفة كما يلي : $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^{2x})$.

1 • عين مجموعة تعريف الدالة f.

2 • ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على مجموعة تعريفها.

3 • عين الدالة المشتقة f' للدالة f.

حل

1 • من أجل كل عدد حقيقي x ، $1 + e^{2x} > 0$. إذن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$.

2 • الدالة $x \longmapsto e^{-x}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و الدالة $x \longmapsto \ln(1+e^{2x})$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$. (اشتقاق دالة مركبة)

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$. (اشتقاق جداء دالتين).

3 • تعيين الدالة المشتقة f' للدالة f.

من أجل كل عدد حقيقي x ؛

$$f'(x) = -e^{-x}\ln(1+e^{2x}) + e^{-x}\left(\frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}\right)$$

$$= -e^{-x}\ln(1+e^{2x}) + \frac{2e^{x}}{1+e^{2x}}$$

إذن من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f'(x) = -e^{-x}\ln(1+e^{2x}) + \dfrac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}$

تمرين 3

f هي الدالة المعرفة كما يلي : $f(x) = \ln\left(\dfrac{2-x}{2+x}\right)$

1 • عين مجموعة تعريف الدالة f.

2 • عين الدالة المشتقة f' للدالة f.

حل

1 • الدالة f معرفة إذا و فقط إذا كان $2 + x \neq 0$ و $\dfrac{2-x}{2+x} > 0$ أي $x \in]-2\,;2[$.

و بالتالي مجموعة تعريف الدالة f هي المجال $]-2\,;2[$.

2 • الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-2\,;2[$.

و من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-2\,;2[$ ؛

$$f'(x) = \frac{\left(\dfrac{2-x}{2+x}\right)'}{\dfrac{2-x}{2+x}}$$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي من المجال $]-2\,;2[$ ؛ $\left(\dfrac{2-x}{2+x}\right)' = \dfrac{-4}{(2+x)^2}$

بعد التبسيط، ينتج أن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-2\,;2[$ ؛ $f'(x) = \dfrac{-4}{4+x^2}$.

5 حساب دالة أصلية لدالة ناطقة

تمرين

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\left\{-1\,;-\frac{1}{2}\right\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{2x^2-x-2}{2x^2+3x+1}$

1 • عين الأعداد الحقيقية a، b، c حيث من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن $-\frac{1}{2}$ و -1

$f(x)=a+\dfrac{b}{2x+1}+\dfrac{c}{x+1}$.

2 • استنتج الدالة الأصلية F للدالة f على المجال $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ حيث $F(0)=-1$.

حل

1 • الدالة f معرفة على المجموعة $\mathbb{R}-\left\{-1\,;-\frac{1}{2}\right\}$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن $-\frac{1}{2}$ و -1

$$a+\frac{b}{2x+1}+\frac{c}{x+1}=\frac{a(2x+1)(x+1)+b(x+1)+c(2x+1)}{(2x+1)(x+1)}$$

$$=\frac{2ax^2+(3a+b+2c)x+a+b+c}{2x^2+3x+1}$$

إذن $f(x)=a+\dfrac{b}{2x+1}+\dfrac{c}{x+1}$

يعني $\dfrac{2x^2-x-2}{2x^2+3x+1}=\dfrac{2ax^2+(3a+b+2c)x+a+b+c}{2x^2+3x+1}$

ينتج أن $2a=2$ و $3a+b+2c=-1$ و $a+b+c=-2$.

باستعمال طريقة التعويض، ينتج أن $a=1$ و $b=-2$ و $c=-1$.

إذن من أجل كلَ عدد حقيقي x يختلف عن $-\frac{1}{2}$ و -1 ؛ $f(x)=1-\dfrac{2}{2x+1}-\dfrac{1}{x+1}$.

2 • تعيين الدالة الأصلية F للدالة f على المجال $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ حيث $F(0)=-1$

الدالة $x\longmapsto x$ هي دالة أصلية للدالة $x\longmapsto 1$ على $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

الدالة $x\longmapsto \ln(2x+1)$ هي دالة أصلية للدالة $x\longmapsto\dfrac{2}{2x+1}$ على $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

الدالة $x\longmapsto \ln(x+1)$ هي دالة أصلية للدالة $x\longmapsto\dfrac{1}{x+1}$ على $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

(استعمال المبرهنة حول الدوال الأصلية للدوال من الشكل $\left(x \longmapsto \frac{u'(x)}{u(x)}\right)$

إذن الدوال الأصلية للدالة f على $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ هي الدوال

$x \longmapsto x - \ln(2x+1) - \ln(x+1) + d$ حيث $d \in \mathbb{R}$.

لدينا $F(0) = -1$ أي $0 + d = -1$. ينتج أن $d = -1$.

إذن الدالة الأصلية F للدالة f على $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ حيث $F(0) = -1$

هي الدالة $x \longmapsto x - \ln(2x+1) - \ln(x+1) - 1$.

6 استعمال اللوغاريتم العشري و الدالة الأسية ذات الأساس a

تمرين 1

بسط الأعداد التالية :

$\log 16$ ؛ $\log(0{,}81 \times 10^{-2} \times 3^{13})$ ؛ $\sqrt[3]{729}$ ؛ $\sqrt[4]{25} \times 125^{\frac{3}{4}}$

حل

• لدينا $\log 16 = \log 2^4 = 4\log 2$

إذن $\log 16 = 4\log 2$.

• لدينا

$$\begin{aligned}\log(0{,}81 \times 10^{-2} \times 3^{13}) &= \log 0{,}81 + \log 10^{-2} + \log 3^{13}\\ &= \log\frac{81}{100} - 2 + 13\log 3\\ &= \log 81 - \log 100 + (-2) + 13\log 3\\ &= 4\log 3 - 2 - 2 + 13\log 3\\ &= -4 + 17\log 3\end{aligned}$$

إذن $\log(0{,}81 \times 10^{-2} \times 3^{13}) = -4 + 17\log 3$.

• لدينا $\sqrt[3]{729} = \sqrt[3]{3^6} = \sqrt[3]{(3^2)^3} = 3^2 = 9$

• لدينا

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{25} \times 125^{\frac{3}{4}} &= \sqrt[4]{5^2} \times 5^{\frac{9}{4}}\\ &= 5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{9}{4}} = 5^{\frac{11}{4}}\end{aligned}$$

إذن $\sqrt[4]{25} \times 125^{\frac{3}{4}} = 5^{\frac{11}{4}}$

تمرين

حل في $\mathbb{R}$ كل معادلة من المعادلات التالية

$\log(3x+4)=0$ ؛ $\log(2x)-\log(x+1)=\log(x-1)$ ؛ $10^{4x}=9$

$10^{x}-2\times 10^{-x}=1$

حل

• حل المعادلة $\log(3x+4)=0$ بوضع الشرط $3x+4>0$ ؛ أي $x\in\left]-\frac{4}{3};+\infty\right[$.

$\log(3x+4)=0$ يعني $x\in\left]-\frac{4}{3};+\infty\right[$ و $\log(3x+4)=\log 1$

أي $x\in\left]-\frac{4}{3};+\infty\right[$ و $3x+4=1$. إذن $x=-1$.

و بالتالي المعادلة $\log(3x+4)=0$ تقبل حلا واحدا هو -1 .

• حل المعادلة $\log(2x)-\log(x+1)=\log(x-1)$ بوضع الشرط $2x>0$ و $x+1>0$ و $x-1>0$ أي $x>1$.

$\log(2x)-\log(x+1)=\log(x-1)$ يعني $x>1$ و $\log\left(\frac{2x}{x+1}\right)=\log(x-1)$

ينتج أن $x>1$ و $\frac{2x}{x+1}=x-1$

أي $x>1$ و $x^2-2x-1=0$

$\Delta'=2$. حلا المعادلة $x^2-2x-1=0$ هما $1+\sqrt{2}$ و $1-\sqrt{2}$.

إذن المعادلة $\log(2x)-\log(x+1)=\log(x-1)$ تقبل حلا واحدا هو $1+\sqrt{2}$.

• حل المعادلة $10^{4x}=9$ حيث x عدد حقيقي.

لدينا $10^{4x}=9$ يعني $\log 10^{4x}=\log 9$

أي $4x=\log 9$ إذن $x=\frac{1}{4}\log 9$

و بالتالي المعادلة $10^{4x}=9$ تقبل حلا واحدا في $\mathbb{R}$ هو $\frac{1}{4}\log 9$.

• حل المعادلة $10^{x}-2\times 10^{-x}=1$.

لدينا $10^{x}-2\times 10^{-x}=1$ يكافئ $10^{x}-2\times\frac{1}{10^{x}}-1=0$

أي $10^{2x}-10^{x}-2=0$ أي $(10^{x})^2-10^{x}-2=0$

بوضع $t=10^{x}$، نحل المعادلة $t^2-t-2=0$ حيث $t>0$. ينتج أن $t=2$.

لدينا $t=2$ و $t=10^{x}$ إذن $10^{x}=2$ و بالتالي $x=\log 2$.

ينتج أن المعادلة $10^{x}-2\times 10^{-x}=1$ تقبل حلا واحدا هو $\log 2$.

مسألة

f دالة معرفة كما يلي : $f(x) = -\frac{x}{x+1} + \ln(x+1)$ و $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o\,;\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة 2 cm)

1. عين مجموعة التعريف E للدالة f.

2. أدرس نهاية الدالة f عندما يؤول x إلى -1 بقيم أكبر.
(يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $\frac{1}{x+1}\varphi(x)$).

3. ادرس تغيرات الدالة f.

4. عين معادلة للمماس (T) للمنحنى $(\mathscr{C})$ عند النقطة ذات لفاصلة 1.

5. ادرس تغيرات الدالة g المعرفة كما يلي : $g(x) = f(x) - \left(\frac{1}{4}x - \frac{3}{4} + \ln 2\right)$.
استنتج إشارة $g(x)$ ثمّ الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C})$ و المماس (T).

6. ارسم المنحنى $(\mathscr{C})$.

7. بيّن أنه يوجد عددان حقيقيان a و b حيث من أجل كل عدد حقيقي x من E، $\frac{x}{x+1} = a + \frac{b}{x+1}$

8. باستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب التكامل $\int_0^1 \ln(1+x)\,dx$.

9. احسب المساحة $\mathcal{A}$ للحيز المستوي المحدود بالمنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيمات ذات المعادلات $y = 0$ ؛ $x = 0$ ؛ $x = 1$. عين قيمة $\mathcal{A}$ بالسنتمترات المربعة.

حل

1. الدالة $x \longmapsto -\frac{x}{x+1}$ معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ و الدالة $x \longmapsto \ln(x+1)$ معرفة من أجل $x > -1$. أي $x \in]-1\,;+\infty[$. إذن مجموعة تعريف الدالة f هي $]-1\,;+\infty[$. أي $E =]-1\,;+\infty[$

2. من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1\,;+\infty[$: $f(x) = \frac{1}{x+1}\left[-x + (x+1)\ln(x+1)\right]$
نعلم أن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x\ln x = 0$. إذن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} (x+1)\ln(x+1) = 0$
و بالتالي $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} \left[-x + (x+1)\ln(x+1)\right] = 1$. و لدينا $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} \frac{1}{x+1} = +\infty$
بما أن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} \frac{1}{x+1} = +\infty$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} \left[-x + (x+1)\ln(x+1)\right] = 1$ فإن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = +\infty$

3. لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\frac{x}{x+1}\right) = -1$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x+1) = +\infty$ إذن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

• الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-1\,;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x
$f'(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$.

إشارة $f'(x)$ على E هي إشارة x على E. ينتج أن الدالة f متناقصة على المجال $]-1 ; 0]$

و متزايدة على المجال $[0 ; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow$	0	$\nearrow +\infty$

• دراسة الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathscr{C})$.

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = +\infty$ إذن المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ مستقيم مقارب يوازي محور التراتيب.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. و $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ (لأن $\frac{f(x)}{x} = -\frac{1}{x+1} + \left(\frac{x+1}{x}\right)\frac{\ln(x+1)}{x+1}$

و $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$) إذن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل فرع قطع مكافئ و في اتجاه محور الفواصل بجوار $+\infty$.

4. لدينا $f(1) = -\frac{1}{2} + \ln 2$ و $f'(1) = \frac{1}{4}$.

إذن معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1 هي $y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4} + \ln 2$.

5. دراسة تغيرات الدالة g.

الدالة g معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال $]-1 ; +\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x

من $]-1 ; +\infty[$ ؛ $g'(x) = -\frac{(x-1)^2}{4(x+1)^2}$

نلاحظ أن $g'(x) = 0$ من أجل $x = 1$.

إذن من أجل كل عدد حقيقي من $]-1 ; +\infty[$ ؛ $g'(x) \leq 0$.

و بالتالي الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-1 ; +\infty[$.

جدول تغيرات g :

لدينا $\lim\limits_{x \to -1} g(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ و $g(1) = 0$

x	-1	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$-$
$g(x)$	$+\infty \searrow$	0	$\searrow -\infty$

من جدول تغيرات الدالة g ينتج أن $g(x) < 0$ على المجال $]1 ; +\infty[$

ينتج أن $(\mathscr{C})$ فوق (T) على المجال $]-1 ; 1[$ ، $(\mathscr{C})$ تحت (T) على المجال $]1 ; +\infty[$

(T) يقطع $(\mathscr{C})$ في النقطة ذات الفاصلة 1.

نلاحظ أن النقطة ذات الفاصلة 1 من $(\mathscr{C})$

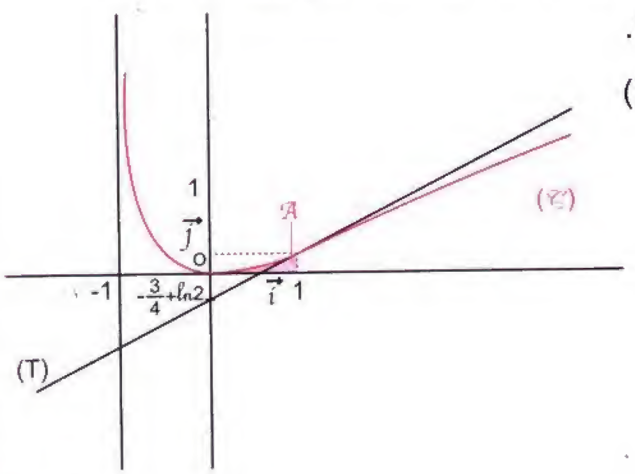
هي نقطة إنعطاف $(\mathscr{C})$ (لأن (T)

يقطع $(\mathscr{C})$ فيها).

6. رسم المنحنى $(\mathscr{C})$ و المماس (T).

$f(1) = -\frac{1}{2} + \ln 2 \approx 0,19$

$-\frac{3}{4} + \ln 2 \approx 0,60$



7. من أجل كل عدد حقيقي x من E ؛ $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$ إذن $a = 1$ و $b = -1$

8. حساب التكامل $\int_0^1 \ln(1+x)\,dx$.

نضع $v'(x) = 1$ و $u(x) = \ln(x+1)$. إذن $v(x) = x + 1$ و $u'(x) = \frac{1}{x+1}$

ينتج أن $\int_0^1 \ln(x+1)\,dx = \left[(x+1)\ln(x+1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x+1}{x+1}\,dx$

$= \left[(x+1)\ln(x+1) - x\right]_0^1 = 2\ln 2 - 1$

إذن $\int_0^1 \ln(x+1)\,dx = 2\ln 2 - 1$.

ملاحظة : يمكن إختيار $v(x) = x$ لحساب التكامل السابق.

9. $\mathcal{A} = \int_0^1 f(x)\,d(x) = \int_0^1 \left[(-1 + \frac{1}{x+1} + \ln(x+1)\right]dx$

$= \left[-x + \ln(x+1) + (x+1)\ln(x+1) - x\right]_0^1$

$= -2 + 3\ln 2$

إذن $\mathcal{A} = -2 + 3\ln 2$ وحدة المساحات

و بالتالي $\mathcal{A} = 4(-2 + 3\ln 2)\ cm^2$ أي $\mathcal{A} \approx 0{,}32\ cm^2$.

خواص جبرية

1 بسط : $\ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)+\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

$4\ln(\sqrt{2}+1)+4\ln(\sqrt{2}-1)-5\ln 2$

$\frac{\ln(\sqrt{3}+1)+\ln(\sqrt{3}-1)}{2}$

$\frac{7}{16}\ln(3+2\sqrt{2})-4\ln(\sqrt{2}+1)-\frac{25}{8}\ln(\sqrt{2}-1)$

$8-\ln\frac{1}{e}$ ؛ $2\ln e^4$

2 a و b عددان حقيقيان موجبان تماما.

عبر عن $\ln a^2b^3$ و $6\ln\frac{1}{\sqrt{a^2 b}}$ بدلالة $\ln a$ و $\ln b$.

3 عبر عن الأعداد التالية بدلالة $\ln 2$ و $\ln 5$.

$\ln 500$ ؛ $\ln\frac{16}{25}$ ؛ $\ln 6,25$

$\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{2}{3}+....+\ln\frac{98}{99}+\ln\frac{99}{100}$

4 في كل حالة من الحالات التالية، عين العدد الطبيعي n حيث : $2^n\le 10^3$ ؛ $\left(\frac{1}{4}\right)^n\le 10^{-2}$

$\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\le 0,1$ ؛ $1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\ge 0,3$

معادلات

5 حل كل معادلة من المعادلات التالية في $\mathbb{R}$

$\ln x=2$ ؛ $\ln x=-2$ ؛ $\ln x=\frac{1}{2}$

$\ln|x|=2$ ؛ $\ln x^2=4$ ؛ $[\ln x]^2=4$

6 حل في $\mathbb{R}$ كل معادلة من المعادلات التالية :

$\ln(1-x)=2\ln 3-3\ln 2$ ؛ $\ln(1-x)^2=4\ln 2$

$\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)=-3\ln 2$ ؛ $\ln\sqrt{1-x}=\frac{1}{2}\ln 3$

7 حل كل معادلة من المعادلات التالية في $\mathbb{R}$

$\ln(2x+7)=\ln(x-3)$

$\ln x+\ln(3x+2)=\ln(2x+3)$

$\ln(x-3)=\ln(x+7)-\ln(x+1)$

$\ln(x^2-2x-3)=\ln(x+7)$

$\ln\left(\frac{x+7}{x+1}\right)=\ln(x+3)$

$\frac{1}{2}\ln(1+x^2)=\ln(x+2)$

$\frac{1}{2}\ln(x-1)+\ln(x+1)=2+\ln\sqrt{1+x}$

8 $P(x)$ كثير حدود حيث

$P(x)=12x^3+x^2-9x+2$

1 • عين الأعداد الحقيقية a، b، c حيث من أجل كل عدد حقيقي x : $P(x)=(x+1)(ax^2+bx+c)$

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x)=0$.

2 • استنتج حلول المعادلة

$12(\ln x)^3+(\ln x)^2-9\ln x+2=0$

متراجحات

9 حل في $\mathbb{R}$ كل متراجحة من المتراجحات التالية : $\ln(3-x)\le 0$ ؛ $\ln\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)\ge 0$

$\ln(x+2)+\ln(3+x)>0$

$\ln(x^2-4)>\ln(6x+5)$

$\ln(2x-5)+\ln(x+1)\le 2\ln 2$

10 حل في $\mathbb{R}$ كل متراجحة من المتراجحات التالية : $\ln(x+1)>\ln(4x-2)-\ln(x-1)$

$\ln(x^2+11x+30)>\ln(x+14)$

$\ln(x^2-2e^2)\le\ln x+1$ ؛ $\ln\left(\frac{x+1}{3x-5}\right)\ge 0$

الجمل

11 حل كل جملة من الجمل التالية في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$\begin{cases}x+y=30\\ \ln x+\ln y=3\ln 6\end{cases}$ ؛ $\begin{cases}x^2+y^2=5\\ \ln x+\ln y=\ln 2\end{cases}$

$\begin{cases}2\ln x+3\ln y=-2\\ 3\ln x+5\ln y=-4\end{cases}$ ؛ $\begin{cases}\ln x+\ln y=\ln\frac{2}{3}\\ x+y=\frac{4}{3}\end{cases}$

$\begin{cases}5x+4y=12\\ \ln(x-1)+\ln y=\ln 3-\ln 5\end{cases}$ ؛ $\begin{cases}\ln(x^2-y^2)=0\\ x-y=2\end{cases}$

النهايات

12 عين النهايات عند 0 و عند $+\infty$ لكل من الدوال التالية (عند وجودها):

$x \longmapsto \sqrt{1+(\ln x)^2}$ ؛ $x \longmapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

$x \longmapsto \frac{\ln x - 2}{\ln x + 1}$ ؛ $x \longmapsto x - 2\ln x$

13 عين النهايات عند $+\infty$ لكل دالة من الدوال التالية: (عند وجودها)

$x \longmapsto x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$x \longmapsto \frac{\ln(1+x^2)}{x}$ ؛ $x \longmapsto \frac{\ln x}{x - \ln x}$

$x \longmapsto x\ln\left(\frac{2x-3}{x}\right)$ ؛ $x \longmapsto \frac{x^2 \ln x}{1+x}$

$x \longmapsto x - (\ln x)^2$ ؛ $x \longmapsto \ln\left(\frac{1+2e^x}{e^{2x}-1}\right)$

الدوال المشتقة

14 في كل حالة من الحالات التالية، عين مجموعة قابلية إشتقاق للدالة f ثمّ عبّر عن $f'(x)$

$f(x) = \ln|7-2x|$ ؛ $f(x) = \ln(5x-1)$

$f(x) = x^2 \ln x$ ؛ $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$

$f(x) = 3x + \ln(1+e^{-2x})$ ؛ $f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$

$f(x) = \ln(4x^2-3x-1)$ ؛ $f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)$

$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ ؛ $f(x) = x^2\ln(1+x)$

تعيين دوال أصلية

15 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{e^x - 2}{2e^x + 1}$$

• اثبت أنه يوجد عددان حقيقيان a ، b حيث من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f(x) = a + \frac{be^x}{2e^x+1}$

• عين دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

16 g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = \frac{e^{2x}}{e^x + 4}$$

• أثبت أنه يوجد عددان حقيقيان a، b حيث من أجل كل عدد حقيقي x ؛

$$g(x) = ae^x + \frac{be^x}{e^x+4}$$

• عين الدالة الأصلية للدالة g التي تنعدم عند 0.

الدوال الأسية و الدوال اللوغاريتم العشري

17 بسط كتابة العدد $a = \frac{\sqrt[6]{6}\,(\sqrt[3]{2})^2\,\sqrt{12}}{\sqrt[3]{3^4}\,\sqrt{\sqrt[3]{6^2}}}$

• بالرفع إلى القوة 6.

• باستعمال القوى الناطقة.

18 بسط الأعداد التالية: $\sqrt[3]{8}$ ؛ $\sqrt[4]{81^3}$ ؛ $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$

$\frac{\sqrt[5]{4^2}\,\sqrt[4]{2}}{\sqrt[3]{8}}$ ؛ $\frac{(\sqrt[3]{4})^2\,\sqrt[4]{2}}{\sqrt[10]{4^3}}$

19 حل في $\mathbb{R}$ كل معادلة من المعادلات التالية:

$4^x + 3\times 2^x + 10 = 0$ ؛ $9^x - 3^{x+2} = \frac{3^5}{4}$

$2^{2x} + 2^{2x-1} = 3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}}$ ؛ $x^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{x}\right)^x$

20 عين مجموعة تعريف و الدالة المشتقة f' لكل دالة من الدوال f التالية:

$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ ؛ $f(x) = 2^x$

$f(x) = x^2\,3^x$ ؛ $f(x) = x^x$

$f(x) = (\ln x)^x$ ؛ $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

21 عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها في كل حالة من الحالات التالية:

$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ ؛ $f(x) = x^{\pi}$

$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ ؛ $f(x) = \frac{x^x}{\ln x}$

22 عين دالة أصلية للدالة f على المجال I في كل حالة من الحالات التالية :

$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ ؛ $I =]0 ; +\infty[$

$f(x) = x^2\sqrt{x}$ ؛ $I =]0 ; +\infty[$

$f(x) = 5^x$ ؛ $I = \mathbb{R}$

مسائل

23 نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي

$$f(x) = (x-1)\ln(x^2)$$

و $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1 • عين مجموعة تعريف الدالة f.

2 • عين نهايات f عند حدود مجموعة تعريفها.

3 • أدرس تغيرات الدالة f.

4 • حل المعادلة $f(x) = 0$.

5 • ارسم المنحني $(\mathscr{C})$.

24 نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

و $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1 • عين D_f مجموعة تعريف الدالة f.

2 • بين أن من أجل كل عدد حقيقي x من D_f $(-x)$ ينتمي إلى D_f و $f(-x) = -f(x)$.

ما هو التفسير البياني الذي تعطيه لهذه النتيجة ؟

3 • بين أن المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل ثلاث مستقيمات مقاربة يطلب تعيين معادلة لكل منها.

4 • ادرس تغيرات الدالة f.

5 • عين معادلة المماس (Δ) للمنحنى $(\mathscr{C})$ عند النقطة ذات الفاصلة e.

6 • ارسم (Δ) و $(\mathscr{C})$ في المعلم السابق.

25 f هي الدالة المعرفة $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$f(x) = x - 4 + \ln(1 + e^{3x})$$

و $(\mathscr{C})$ هو المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1 • أثبت أن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

2 • احسب نهاية $\ln(1 + e^{3x})$ عند $-\infty$.

3 • استنتج وجود مستقيم مقارب للمنحى $(\mathscr{C})$ ثم عين معادلة له.

4 • بين أن من اجل كل عدد حقيقي x،

$$f(x) = 4x - 4 + \ln(1 + e^{-3x})$$

5 • ما هي نهاية $\ln(1 + e^{-3x})$ عند $+\infty$ ؟

6 • استنتج وجود مستقيم مقارب آخر للمنحني $(\mathscr{C})$ ثم عين معادلة له.

7 • ارسم المستقيمين المقاربين و المنحنى $(\mathscr{C})$ في نفس المعلم.

26 f هي الدالة العددية المعرفة كما يلي :

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x}+5}{e^{2x}-2}\right)$$

و $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1 • ما هي مجموعة التعريف E للدالة f ؟

2 • ادرس تغيرات الدالة f و كذا نهاياتها عند حدود مجموعة التعريف E.

3 • لتكن g الدالة المعرفة على E كما يلي

$$g(x) = f(x) - x$$

• عين نهاية $g(x)$ لما يؤول x إلى $+\infty$.

• ادرس إشارة $g(x)$.

• ماذا يمكن استنتاجه بالنسبة إلى المنحنى $(\mathscr{C})$ ؟

4 • ارسم المنحنى $(\mathscr{C})$.